二次函数与一元二次方程

A 基础达标

1．对抛物线 $y=-x^2+2x-3$ 而言，下列结论正确的是(　D　)
A．与 x 轴有两个交点
B．开口向上
C．与 y 轴的交点坐标是(0，3)
D．顶点坐标是(1，－2)
【解析】 A 项，∵ $\Delta=2^2-4\times(-1)\times(-3)=-8<0$，∴抛物线与 x 轴无交点，本选项错误；B 项，∵二次项系数－1＜0，∴抛物线开口向下，本选项错误；C 项，当 $x=0$ 时，$y=-3$，∴抛物线与 y 轴交点坐标为(0，－3)，本选项错误；D 项，∵ $y=-x^2+2x-3=-(x-1)^2-2$，∴抛物线顶点坐标为(1，－2)，本选项正确．故选 D.
2．抛物线 $y=-3x^2-x+4$ 与坐标轴的交点的个数是(　A　)
A．3　　B．2　　C．1　　D．0
【解析】 抛物线解析式 $y=-3x^2-x+4$ 中，令 $x=0$，得 $y=4$，∴抛物线与 y 轴的交点为(0，4)；令 $y=0$，得到 $-3x^2-x+4=0$，即 $3x^2+x-4=0$，解得 $x_1=-\frac{4}{3}$，$x_2=1$，∴抛物线与 x 轴的交点分别为 $\left(-\frac{4}{3}，0\right)$，(1，0)．综上，抛物线与坐标轴的交点个数为 3.
3．如图 22－2－1 是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的部分图象，由图象可知不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是(　D　)
A．$-1<x<5$
B．$x>5$
C．$x<-1$ 且 $x>5$
D．$x<-1$ 或 $x>5$
【解析】 由图象得：抛物线的对称轴是 $x=2$，抛物线与 x 轴的一个交点的坐标为(5，0)，∴抛物线与 x 轴的另一个交点的坐标为(－1，0)．利用图象可知：$ax^2+bx+c<0$ 的解集即是 $y<0$ 的解集，即 $x<-1$ 或 $x>5$.

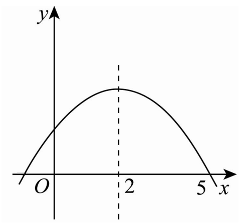


图 22－2－1

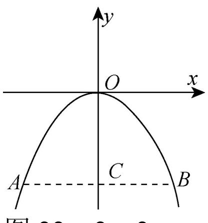


图 22－2－2

4．某涵洞的形状是抛物线形，解析式为 $y=-x^2$，它的截面如图 22－2－2 所示，现测得涵洞的顶点 O 到水面的距离为 9 m，则水面宽 AB 为(　B　)

A．3 m　B．6 m
C．9 m　D．18 m
【解析】 设 B 点的横坐标为 x_0，根据题意得 $-x_0^2=-9$，$x_0^2=9$，$x_0=3$，所以 $AB=2x_0=6$.
5．[2013·济宁]二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象如图 22－2－3 所示，则下列结论中正确的是(　B　)

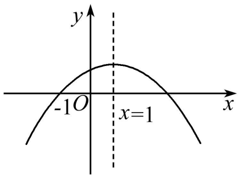


图 22－2－3
A．$a>0$
B．当 $-1<x<3$ 时，$y>0$
C．$c<0$
D．当 $x\geq1$ 时，y 随 x 的增大而增大
6．已知抛物线与 x 轴的一个交点为 $A(1，0)$，对称轴是 $x=-1$，则抛物线与 x 轴的另一交点的坐标是(　B　)
A．(－2，0)　B．(－3，0)
C．(－4，0)　D．(－5，0)
【解析】 设抛物线与 x 轴的另一个交点为 $B(b，0)$，∵抛物线与 x 轴的一个交点为 $A(1，0)$，对称轴是 $x=-1$，∴$\frac{1+b}{2}=-1$，解得 $b=-3$，∴$B(-3，0)$.
7．若二次函数 $y=-x^2+2x+k$ 的部分图象如图 22－2－4 所示，关于 x 的一元二次方程 $-x^2+2x+k=0$ 的一个解 $x_1=3$，则另一个解 $x_2=$__-1__.

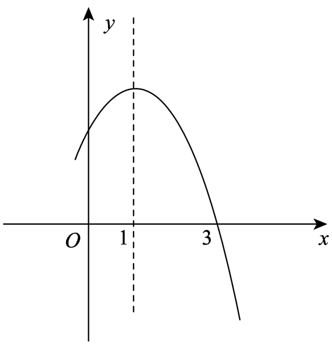


图 22－2－4
【解析】 根据二次函数图象的对称性知图象与 x 轴的另一个交点为(－1，0)，则另一个解 $x_2=-1$.
8．如图 22－2－5，已知二次函数 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4$ 的图象与 y 轴交于点 A，与 x 轴交于 B，C 两点，则点 A 的坐标为__(0，4)__，点 C 的坐标为__(8，0)__.
【解析】 令 $y=0$，则 $-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4=0$，解得 $x_1=-2$，$x_2=8$，所以点 C 的坐标为(8，0)；令 $x=0$，得 $y=4$，所以点 A 的坐标为(0，4).

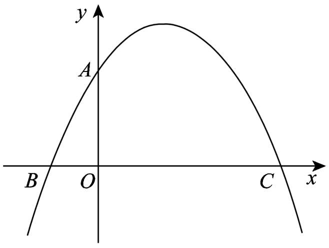


图 22－2－5

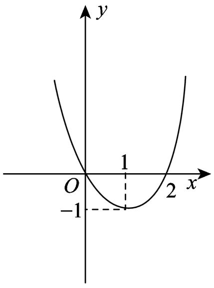


图 22－2－6

9．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 22－2－6 所示，则

(1)这个二次函数的解析式为__$y=x^2-2x$__；

(2)当 $x=$__-1 或 3__时，$y=3$；

(3)根据图象回答：

当__$x<0$ 或 $x>2$__时，$y>0$；

当 $0<x<2$ 时，$y<0$.

【解析】 设二次函数解析式为 $y=a(x-1)^2-1$，

∵图象过(0，0)点，∴$0=a(0-1)^2-1$，

∴$a=1$，∴$y=(x-1)^2-1$，即 $y=x^2-2x$.

令 $y=3$，得 $x^2-2x=3$，$x^2-2x-3=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$，所以当 $x=-1$ 或 3 时，$y=3$.

观察图象可得 $y>0$ 和 $y<0$ 时对应的 x 的取值范围.

10．如图 22－2－7，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象经过 $M(1，0)$和 $N(3，0)$两点，且与 y 轴交于点 $D(0，3)$，求该抛物线的解析式.

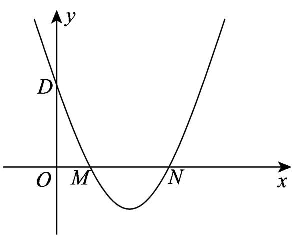


图 22－2－7

解：∵抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象经过 $M(1，0)$和 $N(3，0)$两点，∴可设抛物线的解析式为 $y=a(x-1)(x-3)$.

∵抛物线与 y 轴交于点 $D(0，3)$，

∴把 D 点坐标代入 $y=a(x-1)(x-3)$得 $a=1$，

∴$y=x^2-4x+3$.

能力提升

11．已知二次函数 $y=x^2-3x+m$(m 为常数)的图象与 x 轴的一个交点为(1，0)，则关于 x 的

一元二次方程 $x^2-3x+m=0$ 的两实数根是(　B　)

A．$x_1=1$，$x_2=-1$　B．$x_1=1$，$x_2=2$

C．$x_1=1$，$x_2=0$　D．$x_1=1$，$x_2=3$

【解析】∵二次函数的解析式是 $y=x^2-3x+m$(m 为常数)，

∴该抛物线的对称轴是 $x=\frac{3}{2}$.

又∵二次函数 $y=x^2-3x+m$(m 为常数)的图象与 x 轴的一个交点为(1，0)，

∴根据抛物线的对称性质知，该抛物线与 x 轴的另一个交点是(2，0)，

∴关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+m=0$ 的两实数根分别是 $x_1=1$，$x_2=2$.

12．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 22－2－8 所示，则下列关系式错误的是(　D　)

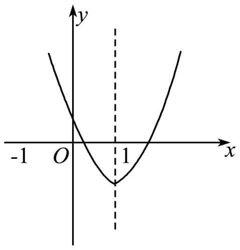


图 22－2－8

A．$a>0$　B．$c>0$

C．$b^2-4ac>0$　D．$a+b+c>0$

【解析】A．∵抛物线的开口向上，

∴$a>0$，正确；

B．∵抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴上，

∴$c>0$，正确；

C．∵抛物线与 x 轴有两个交点，

∴$b^2-4ac>0$，正确；

D．把 $x=1$ 代入抛物线的解析式得：$y=a+b+c<0$，错误，故选 D.

13．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 22－2－9 所示，对称轴是直线 $x=1$.下列结论：①$abc>0$，②$2a+b=0$，③$b^2-4ac<0$，④$4a+2b+c>0$

其中正确的是(　C　)

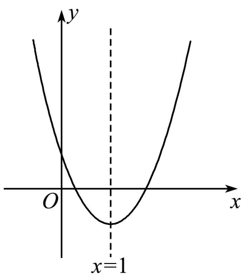


图 22－2－9

A．①③　B．只有②

C．②④　D．③④

【解析】　∵抛物线的开口向上，

∴$a>0$，

∵$-\frac{b}{2a}>0$，∴$b<0$，

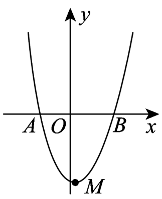
∵抛物线与 y 轴交于正半轴，
∴$c>0$，
∴$abc<0$，①错误；
∵对称轴为直线 $x=1$，
∴$-\frac{b}{2a}=1$，即 $2a+b=0$，②正确，
∵抛物线与 x 轴有 2 个交点，
∴$b^2-4ac>0$，③错误；
∵对称轴为直线 $x=1$，
∴$x=2$ 与 $x=0$ 时的函数值相等，而 $x=0$ 时对应的函数值为正数，
∴$4a+2b+c>0$，④正确；
则其中正确的有②④.
14. 若函数 $y=mx^2+2x+1$ 的图象与 x 轴只有一个公共点，则常数 m 的值是__0 或 1__.
【解析】 (1)若 $m=0$，则函数 $y=2x+1$，是一次函数，与 x 轴只有一个交点；
(2)若 $m\neq0$，则函数 $y=mx^2+2x+1$，是二次函数.
根据题意得 $\Delta=4-4m=0$，
解得 $m=1$.


图 22－2－10
15．如图 22－2－10，二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x+c$ 的图象与 x 轴分别交于 A，B 两点，顶点 M 关于 x 轴的对称点是 M'.
(1)若 $A(-4，0)$，求二次函数的解析式；
(2)在(1)的条件下，求四边形 $AMBM'$的面积.
解：(1)∵点 $A(-4，0)$在二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x+c$ 的图象上，∴$0=\frac{1}{2}\times(-4)^2-(-4)+c$，
解得 $c=-12$，
∴二次函数的关系式为 $y=\frac{1}{2}x^2-x-12$.
(2)由(1)知 $y=\frac{1}{2}x^2-x-12$，
∴$-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times\frac{1}{2}}=1$.
当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}\times1^2-1-12=-\frac{25}{2}$，
∴$M\left(1，-\frac{25}{2}\right)$.
令 $y=0$，得 $\frac{1}{2}x^2-x-12=0$，解得 $x_1=-4$，$x2=6$，

$\therefore B(6,0)$，$AB=|-4-6|=10$.
又∵点 M'与点 M 关于 x 轴对称，

$\therefore S_{四边形AMBM'}=\frac{1}{2}\times AB\times\left|-\frac{25}{2}\right|\times 2=125$.

16．已知：一元二次方程 $\frac{1}{2}x^2+kx+k-\frac{1}{2}=0$

(1)求证：不论 k 为何实数，此方程总有两个实数根；

(2)设 $k<0$，当二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+kx+k-\frac{1}{2}$的图象与 x 轴的两个交点 A，B 间的距离为 4 时，求出此二次函数的解析式.

解：(1)证明：∵ $\Delta=k^2-4\cdot\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})=k^2-2k+1=(k-1)^2$

不论 k 为何实数，$(k-1)^2\geqslant 0$

∴不论 k 为何实数，此方程总有两个实数根；

(2)∵二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+kx+k-\frac{1}{2}$的图象与 x 轴的两个交点 A，B 间的距离为 4.

$\therefore 2\sqrt{(k-1)^2}=4$，

$\therefore (k-1)^2=4$

解得 $k_1=3$，$k_2=-1$

又∵$k<0$

$\therefore k=-1$.

$\therefore y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$

C 拓展创新

17．已知二次函数 $y=k(x+1)\left(x-\frac{3}{k}\right)$与 x 轴交于点 A，B，与 y 轴交于点 C，则能使△ABC 为等腰三角形的抛物线的条数是(　C　)

A．2　B．3　C．4　D．5

【解析】 $y=k(x+1)\left(x-\frac{3}{k}\right)=(x+1)(kx-3)$，所以抛物线经过点 $A(-1,0)$，$B\left(\frac{3}{k},0\right)$，$C(0,-3)$，所以 $AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.①当 $k>0$，点 B 在 x 轴的正半轴时，若 $AC=BC$，则 $\sqrt{\left(\frac{3}{k}\right)^2+3^2}=\sqrt{10}$，解得 $k=3$；若 $AC=AB$，则$\frac{3}{k}+1=\sqrt{10}$，解得 $k=\frac{3}{\sqrt{10}-1}$；若 $AB=BC$，则$\frac{3}{k}+1=\sqrt{\left(\frac{3}{k}\right)^2+3^2}$，解得 $k=\frac{3}{4}$.②当 $k<0$，点 B 在 x 轴的负半轴时，点 B 只能在点 A 的左侧，只可能有 $AC=AB$，则$-1-\frac{3}{k}=\sqrt{10}$，解得 $k=-\frac{3}{\sqrt{10}+1}$，所以能使△ABC 为等腰三角形的抛物线共有 4 条，故选 C.