弧、弦、圆心角

基础达标

1．若$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$是同一圆上的两段弧，且$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，则弦 AB 与弦 CD 之间的关系是(　C　)

A．$AB<CD$　　　　　B．$AB>CD$

C．$AB=CD$　D．不能确定

【解析】 同圆或等圆中等弧所对的弦相等．

2．如图 24－1－27 所示，AB 是⊙O 的直径，C，D 是$\overset{\frown}{BE}$上的三等分点，$\angle AOE=60°$，则$\angle COE$ 为(　C　)

A．40°　　B．60°　　C．80°　　D．120°

【解析】 易知$\angle EOB=180°-60°=120°$．∵C，D 是$\overset{\frown}{BE}$的三等分点，∴$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$，∴$\angle BOC=\angle COD=\angle DOE$，∴$\angle COE=\dfrac{2}{3}\angle EOB$，∴$\angle COE=\dfrac{2}{3}\times120°=80°$．故选 C.

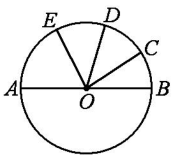


图 24－1－27

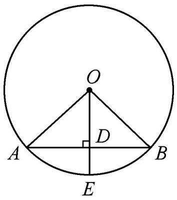


图 24－1－28

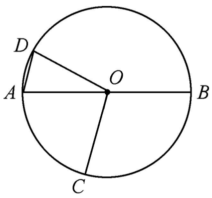


图 24－1－29

3．如图 24－1－28，AB 是⊙O 的弦，$OD\perp AB$ 于 D，延长 OD 交⊙O 于 E，则下列说法错误的是(　D　)

A．$AD=BD$　　　　　B．$\angle AOE=\angle BOE$

C.$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$　D．$OD=DE$

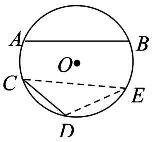
【解析】 由垂径定理得 A，C 正确．又由$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$得$\angle AOE=\angle BOE$，故 B 正确，故选 D.

4．如图 24－1－29，AB 是⊙O 的直径，点 C，D 在⊙O 上，$\angle BOC=110°$，$AD\parallel OC$，则$\angle AOD=$(　D　)

A．70°　 B．60°
C．50°　 D．40°
【解析】$\angle AOC=180°-\angle BOC=180°-110°=70°$.$\because AD\parallel OC$,$\therefore \angle A=\angle AOC=70°$.
$\because OA=OD$,
$\therefore \angle A=\angle D=70°$.$\therefore \angle AOD=180°-\angle A-\angle D=180°-70°\times 2=40°$.故选 D.

5．已知$\widehat{AB}$，$\widehat{CD}$是同圆的两段弧，且$\widehat{AB}=2\widehat{CD}$，则弦 AB 与 $2CD$ 之间的关系为(　B　)
A．$AB=2CD$　B．$AB<2CD$
C．$AB>2CD$　D．不能确定

【解析】 如图，在圆上截取$\widehat{DE}=\widehat{CD}$，则有$\widehat{AB}=\widehat{CE}$，$\therefore AB=CE$.$\because CD+DE=2CD>CE=AB$，$\therefore AB<2CD$.



6．如图 24－1－30，AB 是⊙O 的直径，BC，CD，DA 是⊙O 的弦，且 $BC=CD=DA$，则$\angle BCD=$(　B　)
A．105°　 B．120°
C．135°　 D．150°

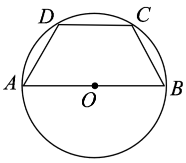


图 24－1－30

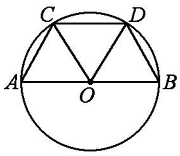


图 24－1－31

7．如图 24－1－34 所示，D，E 分别是⊙O 的半径 OA，OB 上的点，$CD\perp OA$，$CE\perp OB$，$CD=CE$，则 AC 与 CB 的大小关系是__$AC=CB$__.

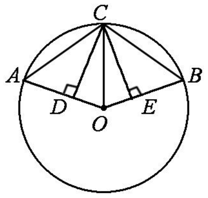


图 24－1－34

B 能力提升

8．如图 24－1－37 所示，已知 AB 为⊙O 的直径，M，N 分别为 OA，OB 的中点，$CM\perp AB$，$DN\perp AB$，垂足分别为 M，N.求证：$\widehat{AC}=\widehat{BD}$.

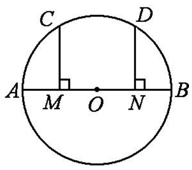
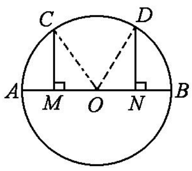


图 24－1－37



第 8 题答图

【解析】 证两弧相等，可根据其定义和圆心角、弦、弧三者之间的关系定理与推论来证明.
证明：如图所示，连接 OC，OD，则 $OC=OD$.

又 $OM=\frac{1}{2}OA$，$ON=\frac{1}{2}OB$，$OA=OB$，

∴$OM=ON$，∴$\mathrm{Rt}\triangle CMO\cong\mathrm{Rt}\triangle DNO$，

∴$\angle COA=\angle DOB$，∴$\widehat{AC}=\widehat{BD}$.

9．如图 24－1－38 所示，A，B，C 为⊙O 上的三点，且有$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CA}$，连接 AB，BC，CA.

(1)试确定$\triangle ABC$ 的形状；

(2)若 $AB=a$，求⊙O 的半径.

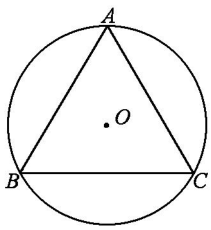
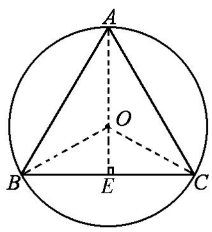


图 24－1－38



第 9 题答图

解： (1)∵$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CA}$(已知)，

∴$AB=BC=CA$(在同圆中相等的弧所对的弦相等)，∴$\triangle ABC$ 为等边三角形.

(2)如图，连接 OA，OB，OC，过 O 作 $OE\perp BC$，垂足为 E.∵$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CA}$(已知)，

∴$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$(在同圆中相等的弧所对的圆心角相等).

又∵$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA=360°$ (周角的定义)，

∴$\angle BOC=120°$.又∵$OB=OC$，$OE\perp BC$，

$\therefore \angle BOE = \angle COE = 60°$，$BE = EC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$(等腰三角形三线合一).

$\therefore \angle OBE = 90° - \angle BOE = 30°$．$\therefore OE = \frac{1}{2}OB$.

根据勾股定理得 $BE^2 + OE^2 = OB^2$，

$\therefore \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}OB\right)^2 = OB^2$，

解得 $OB = \frac{\sqrt{3}}{3}a$(负值已舍)，即⊙O 的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

圆周角

A 基础达标

1．如图 21－1－41，在⊙O 中，$\angle ABC = 50°$，则 $\angle AOC$ 等于(　D　)

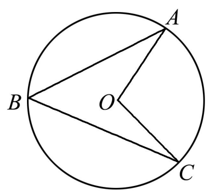


图 21－1－41

A．50°　　B．80°　　C．90°　　D．100°

2．如图 21－1－42，点 A，B，C 在⊙O 上，$\angle BOC = 100°$，则 $\angle A$ 的度数为(　B　)

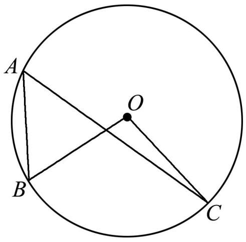


图 21－1－42

A．40°　B．50°　C．80°　D．100°

3．如图 24－1－43，四边形 $ABCD$ 为⊙O 的内接四边形，E 是 BC 延长线上的一点，已知 $\angle BOD = 100°$，则 $\angle DCE$ 的度数为(　C　)

A．40°　B．60°　C．50°　D．80°

【解析】 根据圆周角定理，可求得 $\angle A$ 的度数；由于四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，根据圆内接四边形的性质，可得 $\angle DCE = \angle A = 50°$．

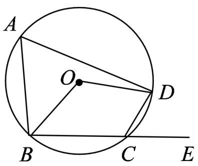


图 24－1－43

4．如图 21－4－44，在⊙O 中，已知 $\angle OAB = 22.5°$，则 $\angle C$ 的度数为(　D　)

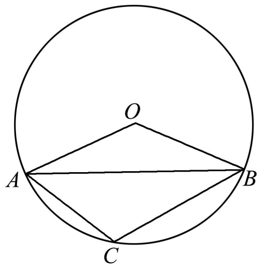


图 21－4－44

A．135° B. 122.5° C. 115.5° D．112.5°

【解析】 ∵$OA=OB$，

∴$\angle OAB=\angle OBC=22.5°$，

∴$\angle AOB=180°-22.5°-22.5°=135°$.

∴$\angle C=\frac{1}{2}(360°-135°)=112.5°$.

B 能力提升

5．如图 24－1－53，$CD\perp AB$ 于 E，若$\angle B=70°$，则$\angle A=$__20°__.

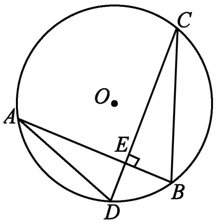


图 24－1－53

【解析】 因为 $CD\perp AB$，$\angle B=70°$，所以$\angle C=20°$，所以$\angle A=20°$.

6．如图 24－1－54，点 O 为优弧 ACB 所在圆的圆心，$\angle AOC=108°$，点 D 在 AB 的延长线上，$BD=BC$，则$\angle D=$__27°__.

【解析】 $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\times 108°=54°$.因为 $BD=BC$，所以$\angle D=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 54°=27°$.

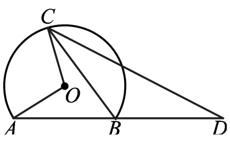


图 24－1－54

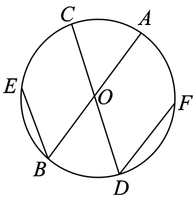


图 24－1－55