实际问题与二次函数

第 1 课时　二次函数与图形面积问题

基础达标

1．小敏用一根长为 8 cm 的细铁丝围成矩形，则矩形的最大面积是(　A　)

A．4 cm^2　B．8 cm^2　C．16 cm^2　D．32 cm^2

【解析】 设矩形一边长为 x cm，则另一边长为$(4-x)$cm，则 $S_{矩形}=x(4-x)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4(0<x<4)$，故当 $x=2$ 时，$S_{最大值}=4$ cm^2.选 A.

2．如图 22－3－1 所示，点 C 是线段 AB 上的一个动点，$AB=1$，分别以 AC 和 CB 为一边作正方形，用 S 表示这两个正方形的面积之和，下列判断正确的是(　A　)

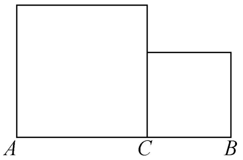


图 22－3－1

A．当 C 是 AB 的中点时，S 最小

B．当 C 是 AB 的中点时，S 最大

C．当 C 为 AB 的三等分点时，S 最小

D．当 C 为 AB 的三等分点时，S 最大

【解析】 设 $AC=x$，则 $BC=1-x$，所以 $S=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$.因为二次项系数大于 0，所以当 $x=\frac{1}{2}$时，S 的值最小，即点 C 是 AB 的中点时，两个正方形的面积和最小，故选 A.

3．用长度一定的绳子围成一个矩形，如果矩形的一边长 x(m)与面积 y(m^2)满足关系 $y=-(x-12)^2+144(0<x<24)$，则该矩形面积的最大值为$\underline{\quad 144\quad}$$m^2$.

【解析】 直接根据二次函数的性质作答，当 $x=12$ 时，y 有最大值为 144.

4．在边长为 4 m 的正方形铅皮中间挖去一个面积至少是 1 m^2 的小正方形，则剩下的四方框形铅皮的面积 y(m^2)与小正方形边长 x(m)之间的函数关系式是$\underline{\quad y=-x^2+16(1\le x<4)\quad}$，$y$ 的最大值是$\underline{\quad 15\quad}$$m^2$.

【解析】 $y=S_{大正方形}-S_{小正方形}$，所以 $y=4^2-x^2$，即 $y=-x^2+16$，又 $1\le x<4$，所以当 $x=1$ 时，$y_{最大值}$为 15 m^2.

5．将一条长为 20 cm 的铁丝剪成两段，并以每一段铁丝的长度为周长各做成一个正方形，则这两个正方形面积之和的最小值是$\underline{\quad 12.5\quad}$$cm^2$.

【解析】 设剪成的两段长分别为 x cm，$(20-x)$cm，这两个正方形面积之和为 y，

则 $y=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{20-x}{4}\right)^2=\frac{1}{16}(x^2+400-40x+x^2)$

$=\frac{1}{16}(2x^2-40x+400)=\frac{1}{8}(x^2-20x+200)$

$=\frac{1}{8}[(x^2-20x+100)+100]=\frac{1}{8}(x-10)^2+12.5$，故两个正方形面积之和的最小值为 12.5 cm^2.

6．某农户计划利用现有的一面墙再修四面墙，建造如图22－3－2所示的长方体水池，培育不同品种的鱼苗．他已备足可以修高为1.5 m、长为18 m的墙的材料准备施工，设图中与现有一面墙垂直的三面墙的长度都为x m，即$AD=EF=BC=x$ m．(不考虑墙的厚度)

(1)若想使水池的总容积为36 m^3，x应等于多少？

(2)求水池的总容积V与x的函数关系式，并直接写出x的取值范围；

(3)若想使水池的总容积V最大，x应为多少？最大容积是多少？

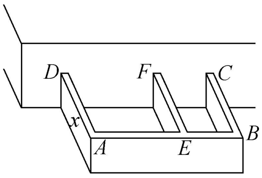


图22－3－2

【解析】(1)水池的容积为长×宽×高，而长为x m，则宽为$(18-3x)$m，高为1.5 m，根据总容积为36 m^3，易列方程求x的值；(2)，(3)根据容积V与x的函数关系，结合二次函数性质即可求解．

解：(1)∵$AD=EF=BC=x$，∴$AB=18-3x$，

∴水池的总容积为$1.5x(18-3x)=36$，

即$x^2-6x+8=0$，解得$x=2$或4，∴x应为2或4.

(2)由(1)知V与x的函数关系式为：

$V=1.5x(18-3x)=-4.5x^2+27x$，

x的取值范围是$0<x<6$.

(3)$V=-4.5x^2+27x=-\frac{9}{2}(x-3)^2+\frac{81}{2}$，

∴当$x=3$时，V有最大值40.5，

∴若使水池的总容积最大，x应为3，最大容积为40.5 m^3.

第2课时　二次函数与最大利润问题　[见B本P24]

A 基础达标

1．烟花厂为扬州“烟花三月”国际经贸旅游节特别设计制作一种新型礼炮，这种礼炮的升空高度h(m)与飞行时间t(s)的关系式是$h=-\frac{5}{2}t^2+20t+1$，若这种礼炮在最高点处引爆，则从点火升空到引爆需要的时间为(　B　)

A．3 s　　　　　　B．4 s

C．5 s　D．6 s

【解析】 当$t=-\frac{b}{2a}$时，即$t=-\frac{20}{2\times\left(-\frac{5}{2}\right)}=4$(s)时，礼炮升到最高点，故选B.

2．某旅行社有100张床位，每床每晚收费20元时，客床可全部租出，若每床每晚每次收费提高4元时，则减少10张床位租出；以每次提高4元的这种方法变化下去，为了投资少而获利大，每床每晚应提高(　C　)

A．8元或12元　B．8元

C．12元　D．10元

【解析】 设每床每晚应提高 x 元，则减少出租床$\frac{x}{4}$•10 张，所获利润 $y=(20+x)\left(100-\frac{x}{4}\cdot 10\right)$，

即 $y=-\frac{5}{2}x^2+50x+2\ 000=-\frac{5}{2}(x-10)^2+2\ 250$.

由 x 是 4 的正整数倍和抛物线 $y=-\frac{5}{2}(x-10)^2+2\ 250$ 关于 $x=10$ 对称可知，当 $x=8$ 或 $x=12$ 时，获利最大，又因为出租床位较少时，投资费用少，故选 C.

3．出售某种手工艺品，若每个获利 x 元，一天可售出$(8-x)$个，则当 $x=$＿＿4＿＿元时，一天出售该种手工艺品的总利润 y 最大．

【解析】 依题意得 $y=x(8-x)=-(x-4)^2+16$，当 $x=4$ 时，y 取得最大值．

4．将进货单价为 70 元的某种商品按零售单价 100 元售出时，每天能卖出 20 个，若这种商品零售价在一定范围内每降价 1 元，其日销售量就增加 1 个，为获得最大利润，应降价＿＿5 元＿＿．

【解析】 设降价 x 元，所获利润为 y 元，则有 $y=(100-70-x)(20+x)=-x^2+10x+600=-(x-5)^2+625$.当 $x=5$ 时，y 值最大，故应降价 5 元．

5．某化工材料经销公司购进了一种化工原料共 7 000 千克，购进价格为每千克 30 元，物价部门规定其销售单价不得高于每千克 70 元，也不得低于每千克 30 元，市场调查发现：单价定为 70 元时，日均销售 60 千克；单价每降低 1 元，日均多售出 2 千克．在销售过程中，每天还要支出其他费用 500 元(天数不是一天时，按整天计算)．设销售单价为 x 元，日均获利为 y 元，那么：

(1)y 关于 x 的二次函数关系式为＿＿$y=-2x^2+260x-6\ 500(30\le x\le 70)$＿＿；

(2)当销售单价定为＿＿65＿＿元时，日均获利最大，日均获利最大为＿＿1 950＿＿元．

【解析】(1)当销售单价为 x 元时，实际降价了$(70-x)$元，日均销售量为$[60+2(70-x)]$千克，日均获利为$[60+2(70-x)]x-30[60+2(70-x)]-500=(x-30)[60+2(70-x)]-500$，

所以 $y=(x-30)[60+2(70-x)]-500$

$=-2x^2+260x-6\ 500(30\le x\le 70)$.

(2)因为 $y=-2x^2+260x-6\ 500=-2(x-65)^2+1\ 950$，所以当销售单价定为 65 元时，日均获利最大，最大利润为 1 950 元．

6．某商品的进价为每件 50 元，售价为每件 60 元，每个月可卖出 200 件．如果每件商品的售价上涨 1 元，则每个月少卖出 10 件(每件售价不能高于 72 元)，设每件商品的售价上涨 x 元(x 为正整数)，每个月的销售利润为 y 元．

(1)求 y 与 x 的函数关系式并直接写出自变量 x 的取值范围；

(2)每件商品的售价定为多少元时，每个月可获得最大利润？最大月利润是多少元？

解：(1)依题意有 $y=(60+x-50)(200-10x)(0<x\le 12$ 且 x 为整数)，

即 $y=-10x^2+100x+2\ 000(0<x\le 12$ 且 x 为整数)．

(2)$y=-10x^2+100x+2\ 000$

$=-10(x^2-10x)+2\ 000=-10(x-5)^2+2\ 250$，

∴当 $x=5$ 时，y 有最大值 2 250，即当每件商品的售价定为 65 元时，每个月可获得最大利润，最大月利润是 2 250 元．

第 3 课时　二次函数与抛物线形问题

A 基础达标

1．如图 22－3－8，济南建邦大桥有一段抛物线形的拱梁，抛物线的表达式为 $y=ax^2+bx$，

小强骑自行车从拱梁一端 O 沿直线匀速穿过拱梁部分的桥面 OC，当小强骑自行车行驶 10 秒时和 26 秒时拱梁的高度相同，则小强骑自行车通过拱梁部分的桥面 OC 共需(　D　)

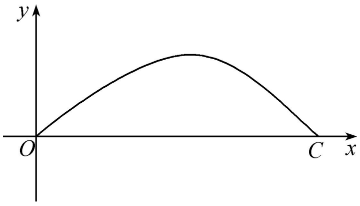


图 22－3－8

A．30 s　　　　　　B．38 s

C．40 s　D．36 s

2．某广场有一喷水池，水从地面喷出，如图 22－3－9，以水平地面为 x 轴，出水点为原点，建立平面直角坐标系，水在空中划出的曲线是抛物线 $y=-x^2+4x$(单位：米)的一部分，则水喷出的最大高度是(　A　)

A．4 米　　B．3 米　　C．2 米　　D．1 米

【解析】 $y=-(x^2-4x+4)+4=-(x-2)^2+4$，水喷出的最大高度是 4 米．

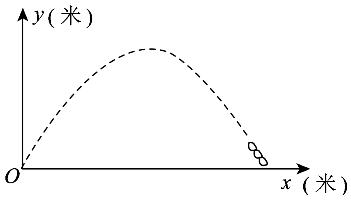


图 22－3－9

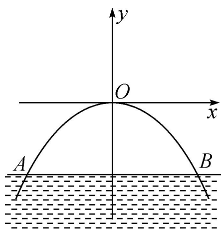


图 22－3－10

3．如图 22－3－10 所示，桥拱是抛物线形，其函数解析式为 $y=-\frac{1}{4}x^2$，当水位线在 AB 位置时，水面宽为 12 m，这时水面离桥顶的高度 h 是(　D　)

A．3 m　B．$2\sqrt{6}$ m　C．$4\sqrt{3}$ m　D．9 m

【解析】 可根据点 B 的横坐标，求出纵坐标．根据图形知点 B 的横坐标为 6，当 $x=6$ 时，$y=-9$，$\therefore h=|-9|=9$，故选 D.

4．图 22－3－11(1)是一个横断面为抛物线形状的拱桥，当水面在 l 时，拱顶(拱桥洞的最高点)离水面 2 m，水面宽 4 m，如图 22－3－11(2)建立平面直角坐标系，则抛物线的解析式是(　C　)

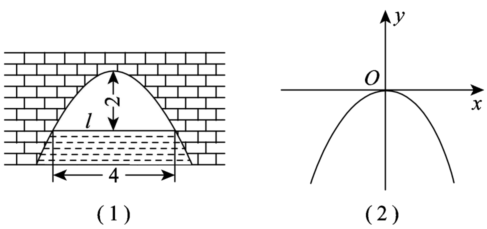


图 22－3－11

A．$y=-2x^2$　B．$y=2x^2$

C．$y=-\frac{1}{2}x^2$　D．$y=\frac{1}{2}x^2$

【解析】 设抛物物的解析式为$y=ax^2$，则把(2，－2)代入得$-2=4a$，∴$a=-\frac{1}{2}$，故选 C.

5．西宁中心广场有各种音乐喷泉，其中一个喷水管喷水的最大高度为 3 米，此时距喷水管的水平距离为$\frac{1}{2}$米，在如图 22－3－12 所示的坐标系中，

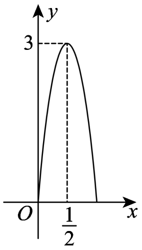


图 22－3－12

这个喷泉的函数关系式是(　C　)

A．$y=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$

B．$y=-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3$

C．$y=-12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$

D．$y=-12\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3$

【解析】 ∵喷水管喷水的最大高度为 3 米，此时距喷水管的水平距离为$\frac{1}{2}$米，∴抛物线的顶点坐标为$\left(\frac{1}{2}，3\right)$，设抛物线的解析式为$y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$，而抛物线还经过点(0，0)，∴$0=a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3$，∴$a=-12$，∴抛物线的解析式为

$y=-12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$.

6．某公园草坪的防护栏是由 100 段形状相同的抛物线组成的，为了牢固起见，每段护栏需要间距 0.4 m 加设一根不锈钢的支柱，防护栏的最高点距底部 0.5 m(如图 22－3－13)，则这条防护栏需要不锈钢支柱的总长度至少为(　C　)

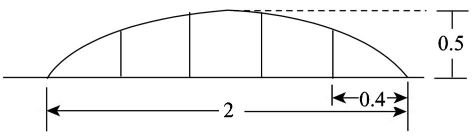


图 22－3－13

A．50 m　B．100 m　C．160 m　D．200 m

【解析】 以 2 米长线段所在直线为 x 轴，以其垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系，求出抛物线的解析式，再求出不锈钢支柱的总长度.

7．[2012·绍兴]教练对小明推铅球的录像进行技术分析，发现铅球行进高度 y(m)与水平距离

x(m)之间的关系式为 $y=-\frac{1}{12}(x-4)^2+3$，由此可知铅球推出的距离是$\underline{\quad 10\quad}$m.

【解析】 令函数式 $y=-\frac{1}{12}(x-4)^2+3=0$，

即 $0=-\frac{1}{12}(x-4)^2+3$，

解得 $x_1=10$，$x_2=-2$(舍去)，

即铅球推出的距离是 10 m.

8．廊桥是我国古老的文化遗产，如图 22－3－14 是某座抛物线形的廊桥示意图，已知抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{40}x^2+10$，为保护廊桥的安全，在该抛物线上距水面 AB 高为 8 米的点 E，F 处要安装两盏警示灯，则这两盏灯的水平距离 EF 是$\underline{\quad 18\quad}$米(精确到 1 米).

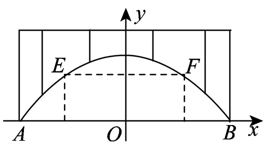


图 22－3－14

【解析】 直接根据 E、F 点的纵坐标为 8，得 $8=-\frac{1}{40}x^2+10$，解得 $x^2=80$，$x\approx\pm 9$，$\therefore E(-9，8)$，$F(9，8)$，故 EF 的长约为 18 米.

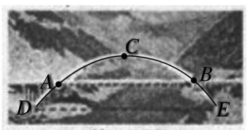
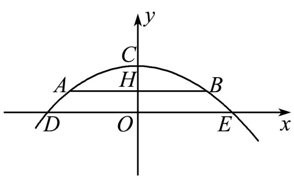


图 22－3－15

9．如图 22－3－15 是我省某地一座抛物线形拱桥，桥拱在竖直平面内，与水平桥面相交于 A，B 两点，桥拱最高点 C 到 AB 的距离为 9 m，$AB=36$ m，D，E 为桥拱底部的两点，且 $DE\parallel AB$，点 E 到直线 AB 的距离为 7 m，则 DE 的长为$\underline{\quad 48\quad}$m.

【解析】 如图所示，建立平面直角坐标系.



设 AB 与 y 轴交于点 H，

$\because AB=36$，

$\therefore AH=BH=18$，

由题可知：$OH=7$，$CH=9$，

$\therefore OC=9+7=16$，

设该抛物线的解析式为 $y=ax^2+k$，

$\because$ 顶点 $C(0，16)$，

$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+16$，

代入点(18，7)

$\therefore 7=18\times 18a+16$，

$\therefore 7=324a+16$，

$\therefore 324a=-9$，

$\therefore a=-\frac{1}{36}$

∴抛物线：$y=-\frac{1}{36}x^2+16$，

当 $y=0$ 时，$0=-\frac{1}{36}x^2+16$，

$\therefore -\frac{1}{36}x^2=-16$，

$\therefore x^2=16\times36=576$

$\therefore x=\pm24$，

$\therefore E(24，0)，D(-24，0)$，

$\therefore OE=OD=24$，

$\therefore DE=OD+OE=24+24=48$，

10．如图 22－3－16 所示，小明的父亲在相距 2 m 的两棵树间拴了一根绳子，给他做了一个简易的秋千，拴绳子的地方距地面高都是 2.5 m，绳子自然下垂呈抛物线状，身高 1 m 的小明距较近的那棵树 0.5 m 时，头部刚好接触到绳子，则绳子的最低点距地面的距离为__0.5__m.

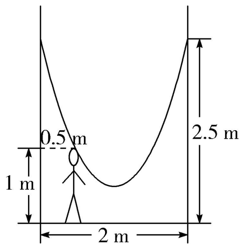
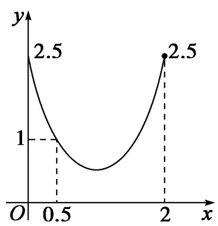


图 22－3－16



第 10 题答图

【解析】 根据题意可建立如图所示的直角坐标系，设绳子对应的抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，则此抛物线经过点(0，2.5)，(2，2.5)，(0.5，1)，所以有 $\begin{cases}c=2.5，\\4a+2b+c=2.5，\\\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=1，\end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=-4$，$c=2.5$，

$\therefore y=2x^2-4x+2.5=2(x-1)^2+0.5$，

即抛物线的顶点坐标为(1，0.5)，

所以绳子最低点距离地面的距离为 0.5 m.

(2)由散点图可知，此函数为二次函数，设二次函数的解析式为 $s=at^2+bt+c$.

将(0，0)，(0.2，2.8)，(1，10)代入上式可得：

$\begin{cases}c=0, \\ 0.04a+0.2b+c=2.8, \\ a+b+c=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-5, \\ b=15, \\ c=0,\end{cases}$

∴此二次函数的解析式为 $s=-5t^2+15t$.

(3)①汽车刹车后到停止时的距离即为汽车滑行的最大距离.

当 $t=-\frac{15}{2\times(-5)}=\frac{3}{2}$时，滑行距离最大，且 $s=\frac{0-15^2}{4\times(-5)}=\frac{225}{20}=\frac{45}{4}$，∴刹车后汽车行驶了$\frac{45}{4}$米才停止.

②由题意可知：$\frac{s_1}{t_1}=\frac{-5t_1{}^2+15t_1}{t_1}=-5t_1+15$；

$\frac{s_2}{t_2}=\frac{-5t_2{}^2+15t_2}{t_2}=-5t_2+15$，∴$\frac{s_1}{t_1}-\frac{s_2}{t_2}=5(t_2-t_1)$.

又∵$t_1<t_2$，∴$\frac{s_1}{t_1}-\frac{s_2}{t_2}>0$，即$\frac{s_1}{t_1}>\frac{s_2}{t_2}$,

$\frac{s_1}{t_1}>\frac{s_2}{t_2}$的实际意义是刹车后到 t_2 时间内的平均速度小于刹车后到 t_1 时间内的平均速度.